Fenêtre de Viviani

La formule Aire $= \displaystyle\iint_D \left\| \left(\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u}\right) \wedge \left(\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v}\right) \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$ est indépendante du choix des paramètres. Lorsqu'on dispose de $z = f(x,y)$ les variables x et y sont les paramètres et la formule se simplifie :

On a : $\overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$ donc $\dfrac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$

donc $\dfrac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial x} \wedge \dfrac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{-\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$ et enfin $\left\| \left(\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial u}\right) \wedge \left(\frac{\partial\overrightarrow{M}}{\partial v}\right) \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}$

Donc l'aire est égale à $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Dans le cas de la fenêtre de Viviani : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ si on considère la partie de la surface au dessus du plan xOy et telle que $y \geqslant 0$. Cela correspond, par symétrie, au quart de la surface totale.

On a : $z = f(x,y) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ sur le domaine D déterminé par $D = \{(x,y)/x^2 + y^2 - Rx \leqslant 0 \; et \; y \geqslant 0\}$

On a : $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}$

donc $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2} = \dfrac{R}{\sqrt{R - (x^2 + y^2)}}$

On doit donc intégrer $\displaystyle\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ sur $D = \{(x,y)/x^2 + y^2 - Rx \leqslant 0 \; et \; y \geqslant 0\}$

Effectuons le changement de variables : $X = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on sait que le Jacobien est égale à r
La traduction du domaine D devient : $D_1 = \{(r,\theta)/0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \;,\; 0 \leqslant r \leqslant R\cos\theta\}$ car le cercle limitant D a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - Rx = 0$ c'est à dire $r^2 - Rr\cos\theta = 0$ donc $r = 0$ (un seul point) ou $r = R\cos\theta$

L'intégrale devient alors Aire $= \displaystyle\iint_{D_1} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \times r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

On obtient $\displaystyle R\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\sqrt{R^2 - r^2}]_0^{R\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} R - R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = R^2[\theta + \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2 \times \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$
La surface totale est alors de $8 \times R^2 \times \left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$ c'est à dire $\boxed{4R^2 \times (\pi - 2)}$