Devoir surveillé No3. Corrigé.

Exercice 1 **9 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

1. Étudier les variations de la fonction g.
   On a $g'(x) = e^x - 1$ or exp est une fonction croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
   donc pour $x > 0$ on a : $e^x > e^0$ puis $e^x > 1$ et enfin $g'(x) > 0$
   donc g est une fonction strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
   $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$ or g est une fonction strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
   donc $g(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

3. En déduire que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^x - x > 0$.
   On a trouvé que sur $[0\ ;\ +\infty[$, on avait $g(x) \geq 0$ c'est à dire $\mathrm{e}^x - x - 1 \geq 0$
   On a alors sur $[0\ ;\ +\infty[$, l'inégalité $\mathrm{e}^x - x \geq 1 > 0$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}.$$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe.
Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.
On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.
   $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, par ailleurs on nous dit que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$
   donc $f([0\ ;\ 1]) \subset [0\ ;\ 1]$.

2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
   (a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.
   $$f(x) - x = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x} - x = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x} - \frac{x(\mathrm{e}^x - x)}{\mathrm{e}^x - x} = \frac{x^2 - 1 + \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}$$
   $$= \frac{(1-x)(-1 - x + \mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x - x} = \frac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}.$$
   (b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0\,;\,1]$.
   Pour étudier la position relative de C par apport à D, on étudie la différence $f(x) - x$.
   On sait déjà que $g(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que $\mathrm{e}^x - x \geq 1 > 0$ donc le signe de $f(x) - x$ est celui de $(1 - x)$
   Donc : si $x = 0$ ou si $x = 1$ alors $f(x) - x = 0$ il y a intersection entre C et D
   si $x < 1$ alors $(1 - x) < 0$ donc $f(x) < x$ donc C est située en dessous de D
   si $x > 1$ alors $(1 - x) > 0$ donc $f(x) < x$ donc C est située au dessus de D

3. (a) Déterminer une primitive de f sur $[0\,;\,1]$.

   On peut remarquer que f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$, une primitive est alors $\ln|u|$ ici, $u = g$ et on sait que g es tune fonction strictement positive sur $[0\,;\,1]$ donc on peut se passer des barres de valeur absolue.
   Une primitive de f sur $[0\,;\,1]$ est alors $F(x) = \ln(\mathrm{e}^x - x)$

   (b) Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

   L'aire est alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = \Big[\ln(\mathrm{e}^x - x)\Big]_0^1 = \ln(\mathrm{e}^1 - 1) - \ln(\mathrm{e}^0 - 0) = \mathrm{e} - 1$ exprimée en unités d'aire, c'est à dire $(e - 1) \times 100\ cm^2$

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & f\left(u_n\right), \quad \text{pour tout entier naturel}\, n. \end{cases}$$

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
   Cf annexe

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

   Soit H_n l'hypothèse de récurrence " $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ "

   On a $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et $U_1 \approx 0{,}56$ donc H_0 est vraie

   Soit n un entier pour lequel H_n est vraie
   on a alors : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$
   or f est une fonction strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$
   donc $f(\frac{1}{2}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$
   or $0{,}5 \leqslant \frac{1}{2}$ et $f(1) = 1$
   donc on a : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$
   C'est à dire H_{n+1} est vraie
   H_0 est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si H_n est vraie alors H_{n+1} est encore vraie.
   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
   Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$, on peut affirmer que la suite (U_n) est croissante.
   Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant 1$, on peut affirmer que la suite (U_n) est majorée.
   Croissante et majorée par 1, la suite (U_n) converge vers une limite L comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1

   U_n converge vers L donc U_{n+1} aussi. f est continue sur $[\frac{1}{2}; 1]$ donc en L donc $U_{n+1} = f(U_n)$ converge vers $f(L)$ La limite étant une valeur unique on a donc $f(L) = L$. D'après l'étude réalisée plus haut, la seule valeur possible est alors $L = 1$

Exercice 2 **5 points**

Les parties A et B sont indépendantes

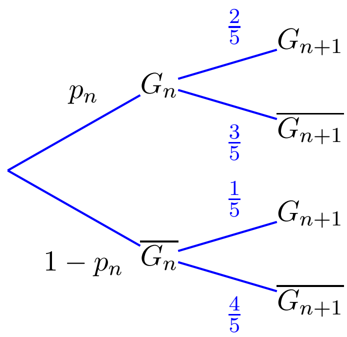
Un site internet propose des jeux en ligne.
Partie A :

Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

   $p_{n+1} = P(G_{n+1}) = P_{G_n}(G_{n+1}) \times P(G_n) + P_{\overline{G}_n}(G_{n+1}) \times P(\overline{G}_n)$

   donc $p_{n+1} = \frac{2}{5} \times p_n + \frac{1}{5}(1 - p_n) = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$

3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

   $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}\left(u_n + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}u_n + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$

   donc $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n$ donc la suite (u_n) est bien géométrique de raison $\frac{1}{5}$

   et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

   (b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

   Puisque $u_n = p_n - \frac{1}{4}$, on a : $p_n = u_n + \frac{1}{4}$

   Puisque (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = \frac{3}{4}$, on a : $u_n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

   Donc $p_n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$

(c) Déterminer la limite de p_n.
Puisque $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\frac{1}{4}$

Partie B :

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes.
La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
   X compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli répété 10 fois de façon indépendante donc X suit une loi binomiale.

   (b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0{,}94$

   (c) Déterminer l'espérance de X.
   L'espérance d'une loi $B(n,p)$ est le nombre $n \times p$ donc ici $E(x) = 2{,}5$

2. Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties.
   Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.

   (a) Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.
   Il ne peut espérer gagner que $2{,}5 \times 8 = 20$ euros et le jeu lui en coûte 30. Il perd donc de l'argent (s'il joue assez longtemps).

   (b) Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 € ? Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.
   Pour obtenir un tel bénéfice, il doit gagner 70 euros donc gagner 9 parties.
   Or $P(X \geqslant 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^0 \approx 3.10^{-5}$

Exercice 3 **6 points**
Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.

Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Il sera attribué 1 point si la réponse est exacte, 0 sinon.

1. Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.
   D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20 % des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche.
   On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

(a) La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire est :

Réponse A : $\frac{3}{5}$ **Réponse B :** $\frac{4}{5}$ **Réponse C :** $\frac{3}{50}$ **Réponse** $\boxed{\textbf{D :} \frac{6}{25}}$

(b) La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

Réponse A : $\frac{21}{50}$ **Réponse** $\boxed{\textbf{B :} \frac{33}{50}}$ **Réponse C :** $\frac{3}{5}$ **Réponse D :** $\frac{12}{25}$

(c) Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est :

Réponse $\boxed{\textbf{A :} \frac{4}{11}}$ **Réponse B :** $\frac{6}{25}$ **Réponse C :** $\frac{7}{11}$ **Réponse D :** $\frac{33}{50}$

2. Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues.
Les boules sont indiscernables au toucher.
L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

(a) La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

Réponse A : $\frac{11}{81}$ **Réponse B :** $\frac{2}{7}$ **Réponse** $\boxed{\textbf{C :} \frac{5}{84}}$ **Réponse D :** $\frac{4}{63}$

(b) La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

Réponse $\boxed{\textbf{A :} \frac{2}{7}}$ **Réponse B :** $\frac{1}{7}$ **Réponse C :** $\frac{1}{21}$ **Réponse D :** $\frac{79}{84}$

(c) On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne.
Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'évènement « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » soit supérieure ou égale à 0,99 est :

Réponse A : 76 **Réponse B :** 71 **Réponse** $\boxed{\textbf{C :} 95}$ **Réponse D :** 94

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

EXERCICE 2