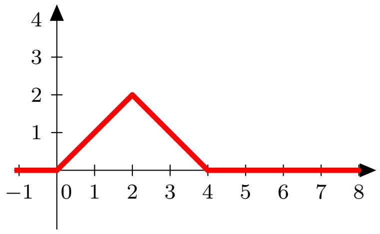
Corrigé du devoir sur la transformation de Laplace

Exercice 1

1. Dessiner le graphe de $f(t) = tU(t) - 2(t-2)U(t-2) + (t-4)U(t-4)$



2. Déterminer la transformée de $f(t) = tU(t) - 2(t-2)U(t-2) + (t-4)U(t-4)$

   $F(p) = \frac{1}{p^2} - 2\frac{1}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-4p}$

3. Retrouver l'original de $F(p) = \frac{1}{p(p+1)}$ puis celui de $G(p) = F(p) \times e^{-3p}$

   $F(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$ donc $f(t) = U(t) - e^{-t}U(t)$

   $G(p) = F(p) \times e^{-3p}$ donc $g(t) = U(t-3) - e^{-(t-3)}U(t-3)$

4. Déterminer les réels A, B , C et D tels que : $H(p) = \frac{p+3}{p^2(p^2+1)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{Cp+D}{p^2+1}$

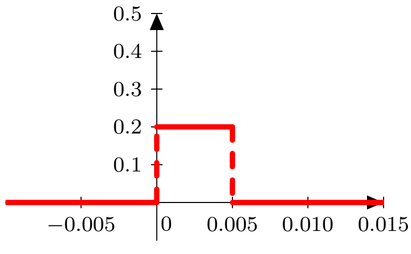
   On a : $\lim_{p\to 0} p^2 H(p) = \frac{3}{1} = 3 = A + 0 + 0$ donc $A = 3$

   On a : $\lim_{p\to i} (p^2+1)H(p) = \frac{i+3}{-1} = -3 - i = 0 + 0 + Bi + C$ donc $C = -3$ et $D = -1$

   On a : $\lim_{p\to\infty} pH(p) = 0 = 0 + B + C + 0$ donc $C = -B = -1$

Exercice 2

1. (a) Représenter la fonction γ pour $t_0 = 0,005$ et $K = 0,2$.



   (b) Déterminer, en fonction de t_0 et K, la transformée de Laplace Γ de la fonction γ.

   On a : $\Gamma(p) = \frac{K}{p} - \frac{K}{p}e^{-t_0 p}$

2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (2), déterminer $F(p)$.

   En appliquant la transformée à l'équation différentielle, on a :

   $\frac{1}{200}(pF(p) - 0) + F(p) = \frac{K}{p}(1 - e^{-t_0 p})$

   puis $\left(\frac{p}{200} + 1\right) F(p) = \frac{K}{p}(1 - e^{-t_0 p})$

et enfin

$F(p) = \dfrac{K}{p\left(\dfrac{p}{200}+1\right)}(1-e^{-t_0p})$

3. (a) Déterminer les réels a et b tels que : $\dfrac{200}{p(p+200)} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{p+200}$

   Notons $G(p) = \dfrac{200}{p(p+200)}$

   On a : $\lim\limits_{p\to 0} pG(p) = 1$ et $\lim\limits_{p\to -200} p + 200G(p) = -1$

   donc $\dfrac{200}{p(p+200)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+200}$

   (b) En déduire l'original f de la fonction F.

   On a alors : $F(p) = \dfrac{K}{p\left(\dfrac{p}{200}+1\right)}(1-e^{-t_0p})$

   donc $F(p) = \dfrac{K}{200p\,(p+200)}(1-e^{-t_0p})$

   donc $F(p) = K \times \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+200}\right)(1-e^{-t_0p})$

   donc $F(p) = K \times \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+200}\right) - K \times \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+200}\right)e^{-t_0p}$

   donc $f(t) = K \times \left(U(t) - e^{-200t}U(t)\right) - K \times \left(U(t-t_0) - e^{-200(t-t_0)}U(t-t_0)\right)$

   Lorsque $t < 0$, on a : $U(t) = U(t-t_0) = 0$ donc $f(t) = 0 - 0 = 0$

   Lorsque $0 \leqslant t < t_0$, on a : $U(t) = 1$ et $U(t-t_0) = 0$

   donc $f(t) = K \times \left(1 - e^{-200t}\right) - 0 = K \times (1 - e^{-200t})$

   Lorsque $t_0 \leqslant t$, on a : $U(t) = 1$ et $U(t-t_0) = 1$

   donc $f(t) = K \times (1 - e^{-200t}) - K \times (1 - e^{-200(t-t_0)}) = K \times (e^{200t_0} - 1)e^{-200t}$

   (c) Donner le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles $[0\ ;\ t_0[$ et $[t_0\ ;\ +\infty[$.

   Sur $[0\ ;\ t_0[$, on a : $f'(t) = +200K \times (1 - e^{-200t}) > 0$ donc f est strictement croissante.

   Sur $[t_0\ ;\ +\infty[$, on : $f'(t) = -200K \times (e^{200t_0} - 1)e^{-200t} < 0$ donc f est strictement décroissante

   Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de ces deux intervalles.

   En 0_- : $f(t) = 0$, donc $\lim\limits_{t\to 0_-} f(t) = 0$

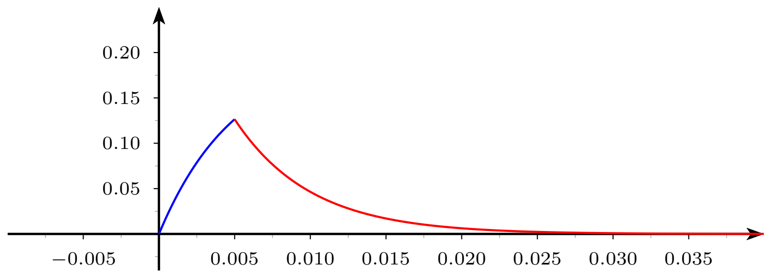
   En 0_+ : $f(t) = K \times (1 - e^{-200t})$, donc $\lim\limits_{t\to 0_+} f(t) = K(1-1) = 0$

   En ${t_0}_-$: $f(t) = K \times (1 - e^{-200t})$, donc $\lim\limits_{t\to 0_-} f(t) = K \times (1 - e^{-200t_0})$

   En ${t_0}_+$: $f(t) = K \times (e^{200t_0} - 1)e^{-200t}$, donc $\lim\limits_{t\to 0_-} f(t) = K \times (1 - e^{-200t_0})$

   En $+\infty$: $f(t) = K \times (e^{200t_0} - 1)e^{-200t}$, donc $\lim\limits_{t\to +\infty} f(t) = 0$

   (d) Représenter la fonction f pour $t_0 = 0,005$ et $K = 0,2$.



Exercice 3

1. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (E'), montrer que $S(p) = \dfrac{18}{(p^2+4)(p^2+9)}$

   On obtient : $p(PS-0) - 0 + 9S = 9 \times \dfrac{2}{p^2+4}$

   Puis $(p^2+9)S = \dfrac{18}{p^2+4}$ et enfin $S(p) = \dfrac{18}{(p^2+4)(p^2+9)}$

2. Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel p, on ait

$$S(p) = \frac{a}{p^2+4} + \frac{b}{p^2+9}$$

   $\dfrac{a}{p^2+4} + \dfrac{b}{p^2+9} = \dfrac{a(p^2+9)+b(p^2+4)}{(p^2+4)(p^2+9)} = \dfrac{(a+b)p^2+9a+4b}{(p^2+4)(p^2+9)}$ et $S(p) = \dfrac{18}{(p^2+4)(p^2+9)}$

   Pour que $\dfrac{a}{p^2+4} + \dfrac{b}{p^2+9} = S(p)$ on choisit : $a+b=0$ et $9a+4b=18$

   donc $b=-a$ et $5a=18$ donc $a=\dfrac{18}{5}$ et $b=\dfrac{-18}{5}$

3. En déduire l'expression de $s(t)$ pour tout nombre réel t positif ou nul.

   On a trouvé que : $S(p) = \dfrac{18}{5}\cdot\dfrac{1}{p^2+4} - \dfrac{18}{5}\cdot\dfrac{1}{p^2+9}$

   donc $S(p) = \dfrac{9}{5}\cdot\dfrac{2}{p^2+4} - \dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{3}{p^2+9}$

   donc $s(t) = \dfrac{9}{5}\sin(2t)U(t) - \dfrac{6}{5}\sin(3t)U(t)$