EXERCICE

On dispose d'un filtre analogique passe-bas du premier ordre dont l'équation différentielle est :

$$7s'(t) + s(t) = f(t)$$

où s est la fonction causale associée au signal analogique de sortie, f est la fonction causale associée au signal analogique d'entrée et où le coefficient 7 correspond à la valeur 7ms de la constante de temps τ du filtre analogique, l'unité pour le temps t étant la milliseconde.

On peut alors réaliser une filtre numérique passe-bas du premier ordre tel que :

Le signal d'entrée est le signal causal échantillonné du signal d'entrée analogique avec la période $T_e = 1$; ce signal est donc associé à la suite x définie sur $\mathbb{N}$ par $x(n) = f(n)$

Le signal de sortie est le signal numérique causal associé à la suite y définie l'équation aux différences obtenue en replaçant dans l'équation différentielle précédente :

- $s'(t)$ par $y(n) - y(n-1)$
- $s(t)$ par $y(n)$
- $f(t)$ par $x(n)$

1. Montrer que l'équation aux différences peut s'écrire : $y(n) = \frac{7}{8}y(n-1) + \frac{1}{8}x(n)$

2. Dans cette question, le signal d'entrée x est l'impulsion unité discrète d définie par $d(0) = 1$ et $d(n) = 0$ pour tout n entier non nul.

a. Calculer $y(0)$ sachant que la suite y est associée à un signal causal

b. Calculer successivement $y(n)$ pour les valeurs de n comprises entre 1 et 3

c. Démontrer que la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal y vérifie : $\mathcal{Z}_y(z) = \frac{1}{8}\frac{z}{z - \frac{7}{8}}$

d. En déduire l'expression de $y(n)$ en fonction de n

e. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} y(n)$

f. Donner l'allure de la représentation graphique de la suite y dans le plan muni d'un repère adapté.

3. Dans cette question, le signal causal d'entrée x est l'échelon unité discret e définie par $e(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Calculer $y(0)$ sachant que la suite y est associée à un signal causal

b. Calculer la valeur exacte de $y(1)$ puis sa valeur approchée au millième

c. Démontrer que la transformée en $\mathcal{Z}$ du signal y vérifie : $\mathcal{Z}_y(z) = \dfrac{1}{8} \dfrac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{7}{8}\right)}$

d. Un logiciel de calcul formel donne : $\dfrac{z}{(z-1)\left(z-\frac{7}{8}\right)} = \dfrac{8}{z-1} - \dfrac{7}{z-\frac{7}{8}}$

En déduire l'expression de $y(n)$ en fonction de n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$

e. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} y(n)$

f. Déterminer les valeurs arrondies au millième de $y(10)$, $y(20)$, $y(30)$

g. Donner l'allure de la représentation graphique de la suite y dans le plan muni d'un repère adapté.

Annexe

y	d	$e(n)$	$ne(n)$	$a^n e(n)$	$y(n-1)e(n-1)$	$y(n-2)e(n-2)$
$\mathcal{Z}(y)$	1	$\dfrac{z}{z-1}$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\dfrac{z}{z-a}$	$z^{-1}Y(z)$	$z^{-2}Y(z)$

Table 1 – Formulaire des transformées en z